1) Para um sistema vibratório ligeiramente amortecido, com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a respectiva resposta x(t) para as seguintes solicitações:

a) força transiente em degrau aplicada no instante $t = \tau$ $(F\mu(t-\tau))$;

b) força estacionária $f(t) = F\sin\omega t$ com $\omega >> \omega_n$.

c) Indicar, sucintamente, como identificar o amortecimento do sistema.

d) Definir frequência natural de vibração e frequência de ressonância de amplitude e de fase.

2) A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema.

a) Caracterizar o modelo espacial de sistemas lineares discretos e de sistemas contínuos.

b) Estabelecer e representar graficamente a função de resposta em frequência deslocabilidade ou recoptância sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações (frequência de ressonância e assímptotas).

3) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades [illegible] ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

a) Definir espectro de choque e justificar a sua utilização em análise dinâmica de estruturas.

b) Justificar a utilização do modelo não amortecido do sistema com um grau de liberdade no estabelecimento de espectros de choque para diferentes tipos de transientes.

4) A resposta dinâmica de um sistema linear discreto com n graus de liberdade pode ser determinada por análise modal ou por integração directa das equações diferenciais do movimento.

a) Referir, sucintamente, os pressupostos de base da análise modal e de qualquer técnica de integração directa.

b) Justificar a utilização duma base modal truncada.

c) Caracterizar o método das diferenças finitas como técnica de integração directa das equações de movimento.

d) Referir os critérios básicos que condicionam a escolha do passo de integração.

5) Os métodos aproximados de determinação das frequências e formas naturais de vibração, como o método de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz, assentam numa aproximação das formas naturais de vibração do tipo $\phi(x) = a_1\psi_1(x) + a_2\psi_2(x) + \ldots + a_n\psi_n(x)$, onde as funções $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)$ são funções conhecidas da variável espacial x.

a) Indicar as propriedades mais relevantes do Quociente de Rayleigh.

b) Apresentar uma análise comparativa entre o método de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz.

c) Caracterizar as funções características, as funções-teste e as funções admissíveis, e situá-las no espaço funcional.

d) Justificar o "relaxamento" de restricções das funções admissíveis em relação às funções teste.

Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa específica ρ, está apoiada sobre dois apoios simples, apresentando um deles uma mola elástica de rigidez angular k, conforme se representa na figura.

a) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

Considerando como aproximação do deslocamento lateral da viga $V(x)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\psi_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_i \sin\left(\frac{i\pi}{\ell}x\right)$,

b) verificar a aplicabilidade das funções de aproximação propostas e classificá-las.

Utilizando o método da energia de Rayleigh e considerando a constante de rigidez angular das molas $k=\alpha\frac{EI}{\ell}$,

c) determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) Representar graficamente a variação da frequência natural fundamental do sistema e do quociente de Rayleigh em função do parâmetro α, indicando eventuais valores particulares.

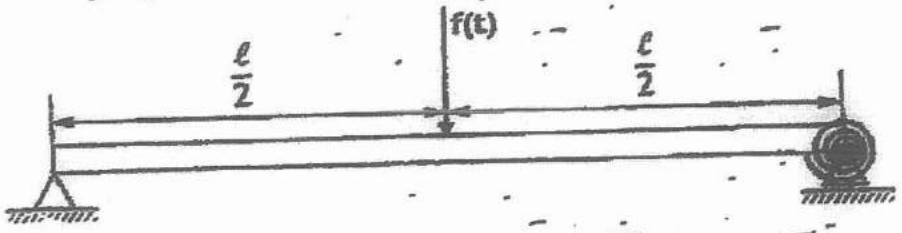
e) Estabelecer o intervalo de valores do parâmetro α para o qual é válida a solução fornecida pelo Quociente de Rayleigh.

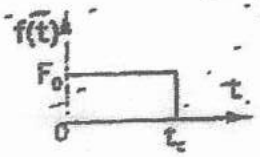
Utilizando o método de Rayleigh-Ritz e considerando o parâmetro $\alpha=5$,

f) determinar uma estimativa das frequências e formas naturais de vibração para n=2. Comentar o resultado obtido.

g) Esboçar as aproximações obtidas para as formas naturais de vibração. Comentar.

h) Determinar um majorante da resposta da viga para a solicitação representada na figura com $t_c=0.19\sqrt{\frac{\rho A\ell^4}{EI}}$ s, não considerando a rigidez angular da mola.





Exame - 2002-02-06

Parte teórica

2. a) O modelo espacial de sistemas lineares discretos com n graus de liberdade baseia-se na obtenção das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento para obter as equações diferenciais que caracterizam a resposta (em todos os graus de liberdade). A resposta é um vector formado pelas coordenadas generalizadas

Nos sistemas contínuos o modelo espacial é obtido através da análise infinitesimal do sistema estabelecendo uma equação diferencial que, em casos específicos, pode ser simplificada desacoplando a influência temporal e espacial.

b) Sim no outro teste

3. Sim no outro teste

4. a) Na análise modal projecta-se o sistema de equações na base modal. Isto é possível porque a base modal é composta pelos n vectores modais que são ortogonais e, por isso, linearmente independentes. Assim a combinação linear dos mesmos pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão n.

Na integração directa apenas se impõe que:

. Se verifica o equilíbrio dinâmico apenas nos instantes (42)

do tempo discretos, t_i, espaçados de Δt;

. Existe uma variação (diferente para cada método) do deslocamento, velocidade ou aceleração no intervalo de tempo Δt.

b) É utilizada porque diminui muito o esforço computacional sem grande perda de precisão se seleccionados os modos correctos

c) . Método explícito;
. Não possui arranque próprio
. Condicionalmente estável

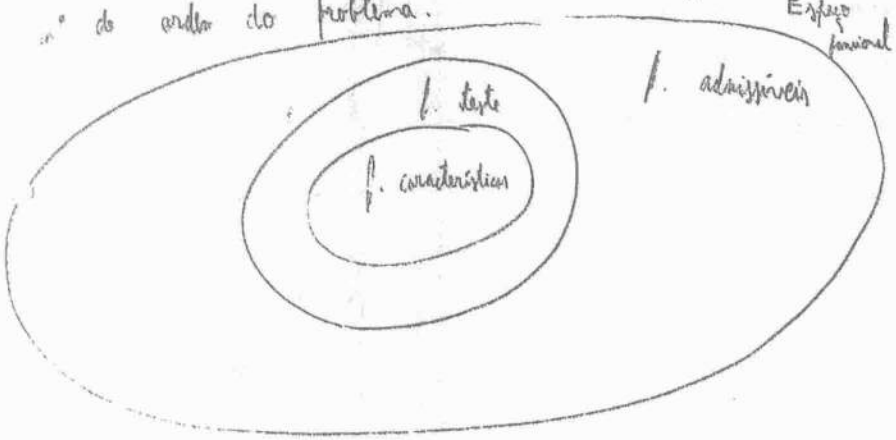
d) . O período natural associado ao modo de maior energia (maior frequência natural) que forma a base modal;
. O nº de pontos que se quer considerar dentro desse período

5. a) . Majorante da frequência fundamental (é minorante da maior frequência natural, que no caso de sistemas contínuos é ∞)
. Estacionaridade em torno da vizinhança da frequência fundamental.

b) Não sei

c) As funções características são as funções exactas que descrevem os modos naturais de vibração, pelo que são as mais restritivas. As funções teste são funções quaisquer

desde que verifiquem todas as condições fronteira (geométricas e naturais) e têm de ser deriváveis pelo menos no mesmo nº de vezes do nº de ordem do problema. As funções admissíveis apenas têm de verificar as condições fronteira geométricas e só têm de ser deriváveis pelo menos metade do nº de ordem do problema.



d) Esse "relaxamento" é possível porque é feita a formulação fraca do problema, ou seja, o integral de cada equação diferencial já foi simplificado através de uma (ou mais) integração por partes baixando a ordem do problema para metade e exigindo apenas a verificação das condições fronteira geométricas. //

Parte prática

a)

$$w(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=0} = 0 \qquad (1)$$

$$w(x,t)\Big|_{x=l} = 0 \Rightarrow V(x)\Big|_{x=l} = 0 \qquad (2)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \qquad (3)$$

$$EI \left.\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} = k \cdot \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l} (\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2 V(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = \frac{k}{EI} \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=l} \qquad (4)$$

(1) e (2) → Cond. geométricas

(3) e (4) → Cond. naturais

b) São derivadas n vezes com $n \to \infty$

$$\psi_i(x)\Big|_{x=0} = \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{l} \times 0\right) = 0 \quad \checkmark \ (1)$$

$$\psi_i(x)\Big|_{x=l} = \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{l} \times l\right) = 0 \quad \checkmark \ (2)$$

$$\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \iff -\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{l}\times 0\right) = 0 \qquad \checkmark\ (3)$$

$$\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=l} = \frac{k}{EI}\left(\frac{i\pi}{l}\right)\cos\left(\frac{i\pi}{l}\,l\right) \iff$$

$$\iff -\left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{i\pi}{l}\,l\right) = \frac{k}{EI}\left(\frac{i\pi}{l}\right)\cos(i\pi) \implies \times\ (4)$$

Logo são funções admissíveis (só verificam as cond geométricas)

c) $$\psi_1(x) = \delta_1 \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$

É a função que melhor aproxima a forma fundamental.

Energia potencial:

$$V_{mec} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{el} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(-\delta\frac{\pi^2}{l^2}\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\right)^2 dx + \frac{1}{2}k\left(\frac{dV(l)}{dx}\right)^2 =$$

$$= \frac{EI}{2}\,\frac{\delta^2\pi^4}{l^4}\left(\frac{l}{2}\times 1\times l\times\frac{1}{l} - 0\right) + \frac{1}{2}\underbrace{k}_{\alpha\frac{EI}{l}}\left(\delta\frac{\pi}{l}\cos\left(\frac{\pi}{l}\cdot l\right)\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{EI}{l^4}\,\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \frac{1}{2}\,\alpha\,\frac{EI}{l}\,\frac{\delta^2\pi^2}{l^2} \Rightarrow$$

✓

$$\Rightarrow V_{max} = \frac{1}{2}\frac{EI}{l^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \alpha\delta^2\pi^2 l\right)$$

En. cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A\,(V(x))^2\,dx + \overset{0}{\underset{*}{f}}_{cfm}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_0^l \delta^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{l}\cdot x\right)dx\right) = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\cdot\delta^2\cdot\left(\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times l\right)\right) =$$

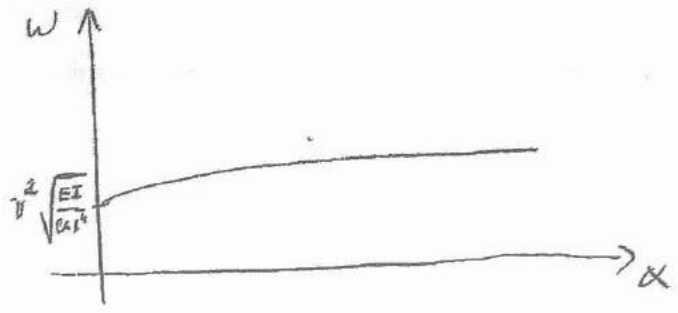
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\,\delta^2\frac{l}{2}\right)$$

Logo:

$$K(x,1) = \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{EI}{l^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4 l}{2} + \alpha\delta^2\pi^2 l\right)}{\frac{\rho A}{2}\,\delta^2\frac{l}{2}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A\, l^4}\left(\pi^4 + 2\pi^2\alpha\right) \Rightarrow \omega = \sqrt{\pi^4 + 2\pi^2\alpha}\cdot\sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

d)



e) Valores limite.

$\alpha \longrightarrow 0$; cond. geométricas:

$V(x)\Big|_{x=0} = 0$ ✓

$V(l)\Big|_{x=l} = 0$ ✓

$\alpha \longrightarrow \infty$, condições geométricas.

$V(x)\Big|_{x=0} = 0$ ✓

$V(x)\Big|_{x=l} = 0$

$\left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=l} = 0 \Rightarrow \delta_1 \frac{\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi}{l} l\right) = 0 \Rightarrow -\delta_1 \frac{\pi}{l} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \delta_1 = 0$ ✗ , logo a solução não é válida quando $\alpha \longrightarrow \infty$

f) ; g) e h) não saem

Exame de 2002/02/06

PARTE TEÓRICA

4.

a) Na análise modal projecta-se o sistema de equações na base modal. Isto é possível porque a base modal é composta por n vectores modais que são ortogonais e, por isso, linearmente independentes. Assim a combinação linear dos mesmos pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão n.

Na integração directa apenas se impõe que:

. se verifique o equilíbrio dinâmico apenas nos instantes de tempo discretos, t_i, espaçados de Δt.

. exista uma variação (diferente para cada método) do deslocamento, velocidade ou aceleração para um Δt.

b) A base modal truncada diminui muito o esforço sem grande perda de precisão se seleccionados os modos correctos.

c) . Método explícito

. Não possui arranque próprio

. Condicionalmente estável.

d) Escolha do passo de integração:

. período natural associado ao modo de maior energia (maior frequência natural) que forma a base modal.

. o nº de pontos que se quer considerar dentro desse período.

5.

a) Propriedades do Quociente de Rayleigh:

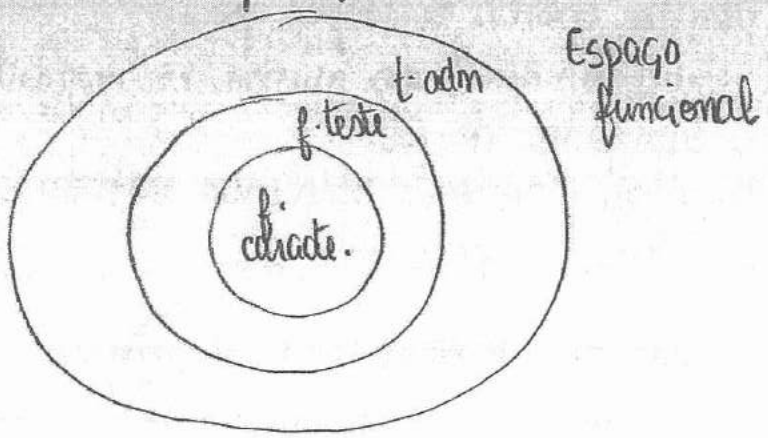
. majorante de frequência fundamental (e minorante da maior frequência natural)

. estacionaridade em torno da vizinhança da frequência fundamental.

c) FUNÇÕES CARACTERÍSTICAS: funções exatas que descrevem os modos naturais de vibração, pelo que são as mais restritas.

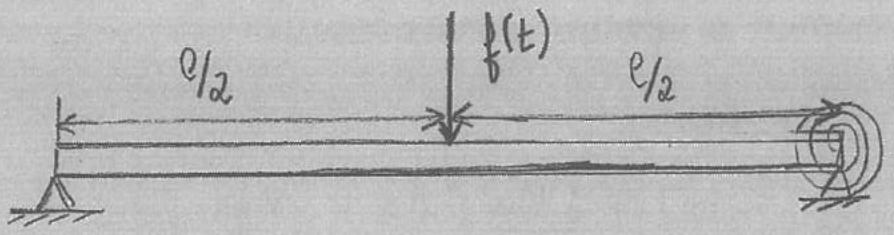
FUNÇÕES TESTE: qualquer função desde que verifiquem todas as condições fronteira (geométricas e naturais) e têm de ser deriváveis pelo menos o mesmo nº de vezes do nº de ordem do problema.

FUNÇÕES ADMISSÍVEIS: apenas têm que verificar as C.F. geométricas e só têm de ser deriváveis pelo menos metade do nº de ordem do problema.



d) O "relaxamento" de restrições das funções admissíveis em rel. às funções teste é possível porque é feita a formulação fraca do problema, ou seja, o integral de cada eq. diferencial já foi simplificado através de uma (ou +), integrações por partes baixando a ordem do problema p/ metade e exigindo apenas a verificação das cond. geométricas.

PARTE PRÁTICA



a) Condições fronteiriça:

$x=0 \therefore$ (1) $V(x)\big|_{x=0} = 0$ C.F. geométrica

(2) $EI \left.\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$ CF natural

$x=\ell \therefore$ (3) $V(x)\big|_{x=\ell} = 0$ CF. geométrica

(4) $EI \left.\frac{d^3V(x)}{dx^2}\right|_{x=\ell} = K \left.\frac{dV(x)}{dx}\right|_{x=\ell}$ CF. natural

b) $V(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \psi_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{\ell}.x\right)$

• F. aproximação derivável n vezes com $n \to \infty$

(1) $\psi_i(x)\big|_{x=0} = 0$ ✓

(2) $\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=0} = 0 \therefore -\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{\ell}.x\right) = 0 \therefore 0 = 0$ ✓

(3) $\psi_i(x)\big|_{x=\ell} = 0 \therefore \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{\ell}.\ell\right) = 0$ ✓

(4) $\left.\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}\right|_{x=\ell} = \frac{K}{EI} \cdot \left.\frac{d\psi(x)}{dx}\right|_{x=\ell} \therefore -\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\frac{i\pi}{\ell}.\ell\right) = \frac{K}{EI}\left(\frac{i\pi}{\ell}\right)\cos i\pi$ ✗

Funções admissíveis

c) Considerando $\psi_1(x) = \delta_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}x\right)$ pois é a função que melhor aproxima a forma fundamental.

Energia potencial:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^\ell EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{cfn}$$

com:

$$\frac{dV(x)}{dx} = \delta\frac{\pi}{\ell}\cos\frac{\pi}{\ell}x \rightarrow \frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\delta\frac{\pi^2}{\ell^2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell}\cdot x\right)$$

$$V_{máx} = \frac{1}{2}EI\int_0^\ell\left(-\delta\frac{\pi^2}{\ell^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x\right)^2 dx + \frac{1}{2}k\frac{dV(\ell)}{dx}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}EI\frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\alpha\frac{EI}{\ell}\cdot\left(\delta\frac{\pi}{\ell}\underbrace{\cos\frac{\pi}{\ell}\ell}_{=1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}EI\frac{\delta^2\pi^4}{\ell^4}\cdot\frac{\ell}{2} + \frac{1}{2}\cdot\alpha\frac{EI}{\ell}\frac{\delta^2\pi^2}{\ell^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{EI}{\ell^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4\ell}{2} + \alpha\delta^2\pi^2\ell\right)$$

$$T_{máx} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A V(x)^2 dx + \underbrace{T_{cfn}}_{=0}\right) =$$

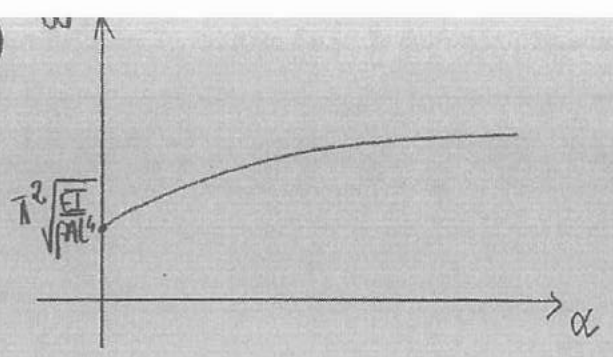
$$= \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\int_0^\ell\left(\delta\operatorname{sen}\frac{\pi}{\ell}x\right)^2 dx = \omega^2\left(\frac{\rho A}{2}\delta^2\cdot\frac{\ell}{2}\right)\right.$$

$$R(V(x)) = \omega^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{EI}{\ell^4}\left(\frac{\delta^2\pi^4\ell}{2} + \alpha\delta^2\pi^2\ell\right)}{\frac{\rho A}{2}\cdot\delta^2\cdot\frac{\ell}{2}} =$$

$$= \frac{EI}{\rho A\ell^4}\left(\pi^4 + 2\alpha\pi^2\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{\rho A\ell^4}}\cdot\sqrt{\pi^4 + 2\alpha\pi^2}$$

d)



e) Valores limite de α $(0, \infty)$

↳ Para $\alpha \to 0$:

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \qquad \checkmark$$

$$V(x)\Big|_{x=\ell} = 0 \qquad \checkmark$$

↳ Para $\alpha \to \infty$

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$V(x)\Big|_{x=\ell} = 0$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x}\Big|_{x=\ell} = 0 \;\therefore\; \delta\frac{\pi}{\ell}\cos\frac{\pi}{\ell}\ell = 0 \;\therefore\; -\delta\frac{\pi}{\ell} = 0 \quad \times$$

Assim se conclui que a solução não é válida para $\alpha \to \infty$.

